

Autori vari

Rendiconti del Seminario Matematico di Brescia

Saggi in onore di Carlo Felice Manara

a cura di Siro Lombardini, Giovanni Melzi,
Pier Carlo Nicola

volume decimo



VITA E PENSIERO
Pubblicazioni della Università Cattolica
Milano

ALBERTO QUADRIO CURZIO

Carlo Felice Manara su economia e matematica

1. Tre momenti: metodologico, didattico, scientifico

Carlo Felice Manara si è interessato della complementarità tra matematica ed economia, e quindi di matematica ed economia, per circa un trentennio. Pur non avendo egli mai considerato questo comparto della sua attività di ricerca come principale, notevoli sono i suoi contributi, sia scritti che orali. Chi scrive conosce, come altri, il contributo di Manara al tema matematica-economia da almeno venticinque anni e si propone di poter dare una testimonianza utile e talora fondata forse su episodi poco noti. Tre sono i momenti che, in parallelo, hanno caratterizzato tutta l'opera di Manara su matematica-economia:

- a) i contributi sul metodo;
- b) i contributi didattici;
- c) i contributi scientifici.

Questi contributi si sono sviluppati in modo diretto, attraverso le pubblicazioni e l'insegnamento universitario; ed in modo indiretto attraverso i ripetuti scambi di opinione con numerosi economisti, specie quelli formatisi alla Università Cattolica di Milano, che si sono poi diffusi in varie Università italiane: Nino Andreatta, Terenzio Cozzi, Carlo D'Adda, Siro Lombardini, Pier Carlo Nicola, Luigi Pasinetti, Alberto Quadrio Curzio.

Credo si possa dire che tutti questi economisti considerano Manara un vero maestro nel campo matematica-economia. Anzi, sono convinto che essi considerano Manara come l'iniziatore, per la parte matematica, di tale tradizione di studi presso la Università Cat-

tolica dove anche Lombardini e Pasinetti hanno svolto un ruolo essenziale.

Ne è ultima e recentissima dimostrazione il fatto che Mario Faliva e Giovanni Melzi, professori ordinari della Università Cattolica e promotori nel 1986 della costituzione dell'Istituto di Matematica Generale, Finanziaria ed Economica dell'Ateneo, abbiano voluto tra i cofondatori Carlo Felice Manara (e Pier Carlo Nicola).

La collaborazione con gli economisti è stata un punto costante dell'attività di Manara nel campo matematica-economia. Ciò è disceso dalla profonda convinzione sia sulla necessità di unire le competenze sia sul fatto che la letteratura economica avesse una sua vastità e profondità tale da richiedere una conoscenza specifica tipica solo dell'economista. Allo stesso tempo Manara ha avuto l'orgoglio della sua scienza, da cui la convinzione che molti ragionamenti economici potessero assumere maggiore coerenza e forza con la strumentazione del matematico.

Ed in questa convinzione egli ha svolto un ruolo di metodologo per molti economisti: per quelli con l'entusiasmo del neofita delle matematiche; per quelli con lo scetticismo di chi guarda ai fenomeni economici con la lente della storia.

Si può dire che Manara ha dedicato molta parte del suo tempo, nel mondo degli economisti, a svolgere questo compito.

E questa impostazione spiega anche perché nessuno abbia mai sentito Manara affermare che non avrebbe discusso un certo problema con un economista non conoscitore della matematica.

2. L'impostazione metodologica

I contributi specifici e gli scritti sul metodo di Manara sono due: il primo è del 1967; il secondo è del 1986.

Su questi ci soffermiamo, dopo aver ricordato che anche in tutto il suo lavoro didattico, sia scritto che orale, Manara si è sempre attenuto ai criteri di cooperazione tra matematica e scienze economiche (e finanziarie) e tra matematica e scienze sociali. Manara non è dunque partito all'attacco del territorio degli economisti armato della sua straordinaria *strumentazione tecnica* in campo matematico ma riferendosi a dei *principi* di collaborazione.

Dice MANARA: «La economia è una dottrina difficile, perché riguarda il comportamento di soggetti umani, per la intricatezza degliflussi e delle interdipendenze, per la presenza della libertà

umana, che spesso rende vane anche le previsioni più accurate e sagaci.

In presenza di queste difficoltà pensiamo quindi che lo spirito metodologico di chiarezza e rigore, portato dall'impiego della Matematica, possa essere di grande utilità per i costruttori di teorie economiche e per gli utilizzatori di queste » (1986, p. 185).

A questa osservazione c'è poco da aggiungere: economia dottrina difficile; spirito metodologico della matematica.

Muovendo da questo presupposto, Manara esamina le obiezioni che vengono rivolte all'uso della matematica in economia e discute di cosa significhi spirito della matematica.

La prima obiezione è che molti fenomeni economici non sono misurabili in senso cardinale e talvolta neppure ordinabili: le rappresentazioni della matematica lascerebbero perciò sfuggire parti importanti della realtà economica risultando così spesso inutili quando non fuorvianti.

La seconda obiezione, in parte sovrapposta alla prima, è che la matematica si limiterebbe a studiare fenomeni misurabili.

La terza obiezione è che, anche laddove la matematica può davvero essere usata come strumento quantitativo, la debolezza dei dati statistici la renderebbe non utile.

La quarta obiezione, o meglio opinione di scetticismo, deriva da un mal uso della matematica in economia: l'uso di teorie e modelli troppo raffinati per poter essere utili all'economia.

Manara conosce e non sottovaluta queste obiezioni ed alle stesse risponde indicando una corretta concezione d'uso della matematica in economia come segue.

Il punto di partenza è, secondo la mia riflessione su Manara, il richiamo allo spirito metodologico della matematica che egli afferma sia con le parole di Pascal sullo « esprit de finesse » sia con quelle di Poincaré sul parlare di teorie più o meno « adeguate » piuttosto che di teorie « giuste » o « sbagliate ».

Ciò significa capire che le teorie matematiche non possono rendere ogni aspetto della realtà, che vi è un'ineliminabile presenza di margini di approssimazione dovuti « non alla struttura teorica ma alle operazioni concettuali e concrete con le quali la struttura stessa viene adattata alla conoscenza di una determinata realtà » (1985, p. 182).

Da ciò discende la necessità per uno studioso di scegliere il giusto

livello di sofisticazione teorica che gli può essere utile per la specifica analisi del fenomeno da studiare.

Questo primo principio sui rapporti tra matematica ed economia ci consente una riflessione.

Le competenze matematiche di Manara e la sua intuizione anche per i fenomeni economici gli avrebbero consentito di percorrere il terreno degli economisti rovesciandovi sopra cumuli inestricabili di formule. Quello che, da qualche anno, vanno facendo giovani generazioni che definirei di « matematici » cioè esperti che però non hanno né le competenze matematiche piene né quelle economiche piene. Noi crediamo che Manara non abbia mai amato e non ami i « matemisti », cioè coloro che scelgono il tema economico da trattare in relazione al più complicato (ma non necessariamente più adatto e più potente) strumento matematico da essi conosciuto. Proprio per questo il suo punto di vista metodologico prima ricordato assume particolare importanza, ed è monito agli economisti.

Su queste premesse MANARA conclude dicendo: « Noi pensiamo che le costruzioni concettuali delle teorie economiche . . . potrebbero essere giudicate con i criteri di adeguatezza di cui parlava Poincaré, senza presunzione di valutarne la 'verità' assoluta. In altre parole, noi pensiamo che soltanto un certo 'esprit de finesse' permetterà di scegliere l'ordine di approssimazione adeguato alle informazioni che si cercano ed a quelle che si posseggono in partenza, e permetta di apprezzare la validità delle deduzioni nella loro estensione e nella loro precisione » (1986, p. 183).

Questa premessa serve a tre categorie di economisti: quelli che considerano la matematica inutile e dannosa (gli scettici); quelli che la considerano inaccessibile (i complessati di inferiorità); quelli che la considerano discriminante e tanto migliore quanto più difficile (i complessati di superiorità).

Sono invece nel giusto gli economisti che ricercano ed apprezzano, anche quando non la usano direttamente, la *matematica adeguata*. Su questa base Manara richiama, negli articoli citati ed in tutte le sue attività su matematica-economia, tre aspetti della matematica.

L'aspetto di linguaggio e di codificazione: uso di simboli artificiali, leggi sintattiche di questi simboli, informazioni espresse senza sbavature concettuali.

L'aspetto delle deduzioni rigorose ed impeccabili che la matema-

tica consente attraverso il ricondurre la deduzione a manovre di simboli e di calcolo (il che non è necessariamente di quantità numeriche).

L'aspetto, più importante, dello spirito e del metodo: « a questo proposito vorremmo ricordare la evoluzione critica che la Matematica ha vissuto nel secolo scorso, evoluzione che ha condotto questa scienza alla adozione del cosiddetto 'metodo assiomatico'. E con questo termine non si intende affatto indicare la imposizione al prossimo delle proprie idee e dei propri punti di vista, come se fossero degli assiomi indiscutibili, ma semplicemente la coscienza del fatto che è necessario strutturare ogni teoria scientifica su certe basi metodologiche: anzitutto fare un inventario completo ed esplicito dei termini primitivi; in secondo luogo fare un elenco completo delle proposizioni primitive » (1986, p. 184).

Il metodo assiomatico richiede una analisi accurata e rigorosa di tutti i punti di partenza ed è su questo su cui si deve e si può disputare. Poi la deduzione — se corretta — è unica.

Su queste premesse di metodo, e cioè il significato di matematizzazione della scienza e la elaborazione critica della stessa matematica, Manara ha collaborato con gli economisti.

3. Il contributo alla didattica

3.1. Manara ha tenuto corsi universitari in discipline matematiche per le scienze economiche e sociali (matematica generale, matematica finanziaria e attuariale, matematica economica, logica) quasi ininterrottamente dal 1956. Egli ha impartito tali insegnamenti alla Università Cattolica di Milano (Facoltà di Economia e Commercio e Facoltà di Scienze Politiche), alla Facoltà di Scienze della Università di Milano, alla Facoltà di Scienze Politiche della Università di Bologna.

Suo merito è di aver favorito l'istituzione dell'insegnamento di Economia Matematica alla Cattolica e quello di Matematica Economica alla Statale di Milano, corsi attualmente tenuti da Pier Carlo Nicola.

L'opera didattica di Manara non solo ha dato vigore a generazioni di studenti « economisti » ma ha cooperato ad indirizzare alla ricerca anche vari di questi, ora docenti universitari.

Sia nell'insegnamento che nella elaborazione di manuali, Manara

ha aggiunto alla sua enorme competenza tecnica due criteri orientativi:

— continuo richiamo ai principi di applicazione della matematica alle scienze economiche;

— rigorosa delimitazione dei temi per evitare di scrivere troppo su tutto; quindi nessun manuale onnicomprensivo e nessun manuale inaccessibile.

Su queste premesse è utile passare in rassegna i suoi testi didattici e cioè l'*Introduzione matematica all'analisi economica* [1957-58(?)], il *Manuale di matematica generale* [1957(?) e 1961], gli *Elementi di economia matematica* (1967), gli *Elementi di matematica finanziaria e attuariale* (1957) (un altro volume con lo stesso titolo, e scritto in collaborazione con P. Canetta è del 1984), gli *Appunti di logica elementare* (1984).

3.2. *Introduzione matematica all'analisi economica*

Il volume, scritto nel 1957-58(?) in collaborazione con Siro Lombardini, rappresenta nella letteratura italiana di quel periodo un importante contributo.

In coerenza alla impostazione metodologica già vista vengono enunciati e rispettati tre principi generali:

a) esporre le teorie matematiche, entrate nell'uso delle applicazioni economiche e dare valutazione di queste;

b) ricordare che l'utilizzazione della matematica e la sua applicazione alla economia non avviene solo per l'aspetto di scienza della quantità data alla matematica stessa, ma anche e forse soprattutto perché la matematica è scienza del linguaggio capace di costringere l'economia entro precise ipotesi, ineccepibili deduzioni, regole grammaticali e sintattiche rigorosissime;

c) matematica ed economia, dunque, per l'efficacia nello studio dei problemi economici e per la mentalità di rigore.

Tali principi hanno una ragione d'essere specifica e non generica rivolgendosi a studenti universitari che già abbiano una conoscenza della matematica generale e della economia politica. Per tale ragione si può dire che il testo è in parte di matematica per economisti e in parte di economia matematica.

Esso si compone di tre blocchi.

Nel primo blocco vengono trattati argomenti di matematica generale, specie quelli che non rientravano nei manuali specifici e che erano, invece, necessari per l'analisi dei fenomeni economici di statica.

Più precisamente si tratta: dei concetti fondamentali di insiemi, corrispondenze, insiemi di punti, vettori; delle funzioni, delle matrici e dei determinanti; dei sistemi di equazioni lineari e delle trasformazioni lineari; delle forme quadratiche; dei massimi e minimi delle funzioni.

Nel blocco secondo vengono considerati alcuni interessanti problemi di metodo nella applicazione della matematica alla economia ed in particolare i concetti di modello, di equilibrio, di stabilità, di analisi statica e di analisi dinamica.

Tutto il volume è di chiarissima impostazione didattica ed è un peccato che l'opera non sia stata continuata — a causa della separazione territoriale dei destini universitari dei due autori — con il volume sulla dinamica.

3.3. *Il manuale di matematica generale*

Il manuale, la cui prima edizione è del 1957 e che sarà poi seguito da una seconda edizione nel 1961, nasce dalla esigenza di insegnamento agli studenti della Facoltà di Economia e Commercio.

La natura e le finalità del manuale sono chiarissime: tener conto delle successive necessità di applicazione della matematica alla statistica, alla matematica finanziaria, alla economia matematica, alla economia.

Su tale finalità è disegnato un compatto manuale intorno ai grandi capitoli del calcolo combinatorio, dei sistemi di equazioni lineari, sugli insiemi, sulle successioni e serie numeriche, sulle funzioni-limiti-continuità, sugli elementi di calcolo differenziale, sul calcolo integrale, sui massimi e minimi, sulle equazioni differenziali.

È utile sottolineare come sono sviluppati in questo volume due argomenti che, a quel tempo, avevano non ampia diffusione tra gli economisti: i sistemi di equazioni lineari; gli insiemi.

Il volume appariva, dunque, molto adatto ai successivi studi di economia.

Ma, oltre a ciò, il volume mirava a dare allo studente della Facoltà di Economia e Commercio una coscienza della matematica che lo sottraesse alla non sempre precisa « intuizione ».

« Si è cercato di tenere la trattazione ad un livello sufficientemente elementare, abbondando in illustrazioni ed esemplificazioni e tenendo conto dell'abituale livello di preparazione matematica degli studenti della Facoltà suddetta [*n.d.a.* di Economia e Commercio]. Tuttavia va tenuto presente che la Matematica ha delle esigenze di rigore e di precisione che non possono essere del tutto trascurate senza snaturare totalmente lo spirito di questa scienza e perdere quindi i vantaggi che essa offre.

... lo studio della matematica darà i suoi frutti non soltanto nel fornire gli strumenti che ormai sono entrati nell'armamentario comune a molte scienze ma nel dare un'abitudine di chiarezza e precisione concettuale, di rigore nella formulazione e nella deduzione che sono pure strumenti necessari per ogni lavoro scientifico » (1961, Introduzione pp. 1, 2).

3.4. *Elementi di economia matematica*

Questo magnifico manuale, scritto in collaborazione con Pier Carlo Nicola, emerge da una esperienza didattica, la prima versione essendo infatti apparsa nell'anno accademico 1964-65 con il titolo *Appunti alle lezioni di Matematica Finanziaria (Economica)*.

L'edizione definitiva esce con il titolo *Elementi di economia matematica* (1967) ed essa costituisce un punto di partenza per un nuovo impulso di interesse per l'economia matematica per vari economisti prima menzionati.

Per questo riteniamo non inopportuno riprendere ampiamente la riflessione che noi abbiamo svolto a proposito del Manuale su *Mondo Economico* nel giugno del 1967.

« a) L'applicazione dello strumento matematico all'analisi economica costituisce ormai un dato di fatto, al di là dei giudizi di valore e delle polemiche, talvolta violente, che ancor oggi si sviluppano sull'argomento. Muovendo da questo dato di fatto, crediamo che il volume di C. F. Manara e P. C. Nicola meriti una particolare attenzione degli studiosi italiani interessati ai problemi scientifici dell'economia e della matematica economica, e ciò per due ordini di motivi:

— in primo luogo, muovendo dall'opinione che un problema rilevante per lo sviluppo della scienza economica sia quello di istituire una sistematica collaborazione tra economisti puri, economisti ma-

tematici ed econometrici — opinione questa d'altronde espressa da autorevoli rappresentanti dei citati rami di studi, quali J. M. Clark (cfr. *Mathematica Economist and Others: A Plea for Communicability*, in « American Economic Review », Proceedings, vol. 37, maggio 1947), e T. Haavelmo (cfr. *The Role of the Econometrician in the Advancement of Economic Theory*, in « Econometrica », vol. 26, luglio 1958), per tacere di illustri economisti italiani — e dalla duplice constatazione che da un lato il presente lavoro racchiude, con un notevole grado di compattezza, i più recenti contributi in economia matematica, mentre dall'altro esso viene a coprire, almeno per quanto è a nostra conoscenza, una zona vuota della trattatistica italiana in materia, crediamo di poter ravvisare nello stesso volume un punto di riferimento offerto, oggi in Italia, dagli economisti matematici per dare impulso alla menzionata collaborazione;

— in secondo luogo, qualunque possa essere l'opinione sul primo ordine di motivi d'interesse da noi ravvisato, ci sembra che il presente volume offra a tutti gli studiosi interessati all'economia matematica materiale utilissimo per estendere ed aggiornare le proprie conoscenze. Chi sia avvezzo a certa parte della letteratura internazionale in materia, ed anche ad alcune riviste italiane d'economia particolarmente sensibili a questo settore, non può sottovalutare l'importanza di disporre di un testo base di riferimento per seguire un ramo di studi in così rapido sviluppo.

b) Ciò premesso, consideriamo le *caratteristiche principali* del volume. Quattro aspetti generali, a nostro avviso, concorrono a definirne la fisionomia.

Innanzitutto, il lavoro copre un campo di teorie che “si potrebbero definire classiche anche se qualcuna ha poco più di un decennio di vita”. La sua caratteristica principale consiste nella generalità e nella compattezza della trattazione, che “trasformano” ed unificano, in modo pregevole, le citate teorie. Noi crediamo che una sintesi delle intenzioni degli Autori sia ben data da questo giudizio, espresso in termini del tutto generali nell'Introduzione: “l'uso del linguaggio e dello strumento matematico nella scienza porta come conseguenza la massima generalità possibile nelle formulazioni e nelle deduzioni; si ha cioè che un problema che sia stato risolto per un determinato fenomeno particolare si può considerare risolto in relazione ad ogni altro fenomeno che si possa.

formalizzare con le stesse relazioni e gli stessi simboli” (cfr. p. 4) ...

In secondo luogo, è da osservare che per la realizzazione di tali obiettivi gli Autori hanno fatto abbondante uso della logica simbolica, dell'algebra matriciale, nonché di una serie di teorie e teoremi matematici che non rientrano nelle conoscenze del “lettore medio”. Tale affermazione va tuttavia precisata. Infatti la indubbia difficoltà di lettura del lavoro può tuttavia essere assai ridotta essendo lo stesso corredato di ben sette Appendici strettamente matematiche: 1) Cenni di logica e di teoria degli insiemi; 2) Spazi vettoriali e matrici; 3) Forme quadratiche; 4) Elementi di topologia dello spazio vettoriale a dimensione finita sul campo reale; 5) Insiemi convessi negli spazi vettoriali; 6) Matrici ad elementi non negativi; 7) Successioni ed equazioni alle differenze finite.

Queste appendici offrono al lettore, non preparato nel settore, tutta la strumentazione necessaria. È d'uopo inoltre avvertire che queste nozioni non sono rivolte a pochi “eletti”: le applicazioni sempre più frequenti della matematica a diversi settori dell'economia operativa molte volte richiederebbero ad un laureando della Facoltà di Economia e Commercio di esserne a conoscenza.

In terzo luogo è da notare che, in relazione a numerosi problemi trattati sono stati fatti significativi progressi rispetto al pre-esistente stato della teoria. Si vedano a questo proposito, per esempio, l'analisi del consumo — in relazione alla assiomatizzazione delle relazioni di preferenza e indifferenza e all'analisi delle ipotesi teoriche sulle quali si basa la dimostrazione dell'esistenza della funzione di utilità per il consumatore — e la trattazione del problema di esistenza di soluzioni per il modello walrasiano di equilibrio economico generale, svolta con successo mediante l'applicazione di metodi topologici.

Il lettore al corrente della letteratura sui diversi argomenti trattati non durerà fatica a riscontrare altri originali contributi specifici, sui quali tuttavia non ci soffermiamo...

c) Ciò detto, esaminiamo brevemente il contenuto specifico del lavoro, ricorrendo tuttavia a drastiche semplificazioni. Ci interesserebbe maggiormente della *problematica economica trattata* (tralasciando la discussione delle citate Appendici matematiche, anche se esse costituiscono un terzo di tutto il lavoro) la quale d'altronde è d'uopo rimarcarlo, è egregiamente inquadrata nello stato attuale

della teoria economica con una nota storica posta alla fine di ogni capitolo e con una selezionata bibliografia ragionata.

c.1 Una prima parte riguarda la *modellistica macroeconomica e bisettoriale*.

Il pregio principale di questa analisi consiste nell'aver raggruppato, con una compattezza notevole, e quindi con la possibilità di immediate connessioni alcuni dei principali modelli esistenti: modello della ragnatela, modello delle scorte, modello Keynesiano, modello di Metzler per l'analisi di fenomeni ciclici, modello di interazione tra moltiplicatore ed acceleratore (o Samuelson-Hicks), ancora per la spiegazione delle fluttuazioni cicliche.

La modellistica bisettoriale analizzata segue invece le trattazioni di Meade ed Uzawa. Gli Autori avvertono sin dall'inizio che poco spazio è stato dedicato a questi modelli macroeconomici, la cui importanza a fini operativi va diminuendo, sia per l'aumento delle disponibilità nei dati statistici, sia per il progresso dei metodi matematici e dei metodi di calcolo numerico che spingono verso schemi più analitici.

c.2 Una seconda parte è dedicata alla *teoria della programmazione lineare e alla teoria dei giochi*: alle stesse si farà frequentemente riferimento nel corso di tutta l'analisi successiva. Così la programmazione lineare sarà utilizzata per una dimostrazione delle unicità delle soluzioni del sistema walrasiano, mentre la teoria dei giochi sarà richiamata in relazione ad una generalizzazione del modello dinamico di von Neumann.

c.3. Una terza parte è dedicata ai *problemi microeconomici del consumo e della produzione*.

L'analisi del consumo è svolta nei termini tradizionali di relazioni di preferenza e indifferenza, estendendosi a trattare tutti i problemi delle funzioni di domanda, sia a livello individuale che a livello globale.

Per quanto riguarda la teoria della produzione, svolta con riferimento ad un mercato di concorrenza perfetta, in quanto i modelli di equilibrio generale, che saranno analizzati poi, presuppongono questa ipotesi, sviluppa tutta l'analisi sulle funzioni di trasformazione e produzione, seguendo le più moderne trattazioni del Debreu e del Samuelson; mentre in relazione ai processi di produzione lineari viene valorizzata immediatamente la teoria della programmazione lineare prima introdotta.

c.4 Una quarta parte è dedicata ai *modelli statici di equilibrio generale* e ai connessi problemi di stabilità delle soluzioni.

Si passa, perciò, dai modelli macroeconomici ai modelli disaggregati, come d'altronde è avvenuto in sede di utilizzazioni pratiche di questi strumenti a fini di previsione o decisionali.

Si inizia con un esame dei modelli leontieviani nei prezzi e nelle quantità nelle versioni "chiusa" ed "aperta". Questi modelli vengono quindi "generalizzati" con l'introduzione di più processi produttivi per la produzione di uno stesso bene, ma la generalizzazione sarà poi dimostrata solo apparente, in quanto, quando vi sia un solo fattore primario (il lavoro), i teoremi di non sostituzione portano a concludere che un processo è sempre più "conveniente" di tutti gli altri.

Successivamente si passa al modello Walrasiano di produzione, che si distingue dalla prima categoria considerata in quanto la domanda finale dei beni, supposta fissata esogenamente nei primi, è qui posta in funzione dei prezzi, mentre si suppongono qui date certe quantità di fattori produttivi iniziali.

Infine, i due modelli proposti vengono generalizzati in un unico — che li comprende come casi particolari — e che viene poi collegato alla teoria paretiana del benessere economico per la precisazione del concetto di "ottimo" paretiano.

L'analisi precedentemente svolta, relativamente a tutti i citati modelli, mira a stabilire l'*esistenza* di prezzi e quantità soluzione, tali cioè da soddisfare le relazioni in cui gli stessi si strutturano e d'avere significato economico. Si passa quindi a studiare l'*unicità* delle soluzioni individuate, ed infine, in particolare, la *stabilità* delle stesse, ovvero il "meccanismo" che "schematizza la successione temporale di eventi attraverso i quali da una posizione iniziale qualsiasi il sistema (economico) raggiunge una posizione di equilibrio" (cfr. pp. 137-138).

c.5 La parte finale del lavoro è dedicata ai *modelli plurisetoriali dinamici*.

Com'è noto, e come giustamente ricordano gli Autori, questo settore della teoria economica è relativamente recente — almeno per quanto concerne la sua esposizione matematica — e sede di aspre controversie.

La loro trattazione si limita perciò ad alcuni modelli *base* quali quello di Leontief, di von Neumann e quello legato a quest'ultimo

e noto come "teorema dell'autostrada". Questa scelta non solo risponde alla logica interna del lavoro, essendo infatti più immediati i collegamenti fra questi modelli e i citati modelli statici, ma anche a precise ragioni storiche in quanto da questi si è sviluppata poi tutta la modellistica multisettoriale dinamica ».

3.5. *Elementi di matematica finanziaria e attuariale*

Di matematica finanziaria ed attuariale, Manara si è occupato spesso. La sua prima opera didattica su questo tema risale al 1957; la più recente, in collaborazione con Pietro Canetta, al 1984.

Questo volume copre i problemi classici della capitalizzazione, delle rendite e degli ammortamenti (parte prima), gli elementi di calcolo delle probabilità (parte seconda), della sopravvivenza e mortalità, di assicurazione vita, di assicurazione mista, di premi periodici e caricati, di riserva matematica.

Ancora una volta troviamo qui la forte esigenza di essere coerenti ad un metodo, piuttosto che elaborare una strumentazione tecnica a se stante e frammentaria:

« Il testo che presentiamo è frutto di un lungo lavoro di ricerca e di insegnamento: pertanto le soluzioni didattiche che abbiamo adottate sono state collaudate sul campo, da ripetute osservazioni delle reazioni degli studenti e degli studiosi in genere. Il nostro lavoro è stato ispirato dalla ricerca della brevità e della sintesi; di conseguenza abbiamo scelto di presentare i vari argomenti partendo dalle idee generali e traendo da esse, come conseguenza, le varie leggi particolari e le tecniche di soluzione dei vari problemi.

Per esempio, nel caso della matematica finanziaria, siamo partiti dalla equazione differenziale della capitalizzazione per far scaturire da questa le leggi e le convenzioni più generalmente adottate. Nel caso del calcolo delle probabilità, abbiamo presentato questa branca della matematica come una dottrina delle decisioni razionali in condizioni di informazione incompleta e di utilizzazione metodica delle informazioni che si possono ottenere dalla esperienza » (1984, p. 5).

Più in generale Manara richiama i punti costanti della sua riflessione: linguaggio matematico, uso dello strumento matematico e sua valutazione critica, formazione scientifica all'uso della matematica:

« Il nostro insegnamento vorrebbe proporsi: dare un maneggio si-

curo del linguaggio matematico e delle sue tecniche, nel contempo allenare all'impiego dello strumento matematico e alla sua critica costante, e al controllo continuo del suo significato e dei suoi limiti; mirare, in una parola, alla formazione scientifica, conferendo alla nostra trattazione un carattere tale che l'insieme delle tecniche e dei metodi esposti diventi un accrescimento culturale di colui che li adotta.

In particolare riteniamo che l'applicazione dei metodi matematici alla finanza, che porta all'insieme di teorie e tecniche chiamate abitualmente appunto matematica finanziaria ed attuariale, sia abbastanza interessante per le riflessioni che può provocare, il cui valore ha una portata ben maggiore di quella che si potrebbe presumere a prima vista.

Si può per esempio osservare che nella matematica finanziaria le grandezze (tempo e quantità di denaro) sono discrete e dovrebbero a prima vista essere rappresentate da numeri interi, mentre lo schema della continuità viene abitualmente adottato, insieme con le tecniche dell'analisi matematica.

Questa circostanza può dare occasione ad utili confronti tra l'impiego ragionevole dei metodi matematici ed una illusoria precisione matematica che viene spesso vanamente cercata e ingiustamente vantata: il primo non può escludere l'errore nelle approssimazioni, ma permette di rendersene conto e di dominarlo nei limiti del possibile. La seconda è spesso soltanto un artificio contabile che nulla ha di scientifico, ma ha soltanto un significato convenzionale, come avviene per esempio per i dati che compaiono in certi bilanci, che figurano precisi fino alla lira su migliaia di miliardi, e che sono puramente illusori e fittizi dal punto di vista della vera precisione matematica » (1984, p. 5).

In secondo luogo appare il criterio della gradualità nell'insegnamento e la distinzione tra l'indispensabile, il necessario, e l'opportuno:

« In particolare nell'Appendice sono presentate le nozioni di analisi matematica che sono da noi ritenute più direttamente utili allo sviluppo della materia qui trattata; abbiamo dedicato particolare attenzione alle questioni di calcolo numerico e di impiego dei mezzi di calcolo che oggi sono alla portata di tutti gli studiosi.

Riteniamo infatti che le tavole numeriche non abbiano oggi la stessa utilità che avevano in un passato anche recente. Non osiamo

affermare che il loro impiego sia oramai superato, ma pensiamo nel contempo che sia giusto insegnare a utilizzare quegli strumenti elettronici portatili o addirittura tascabili che molti sfoggiano ma che pochi forse sanno sfruttare in tutte le loro possibilità.

I complementi che sono stati aggiunti alla fine di qualcuna delle parti in cui il volume è diviso hanno un significato ed una impostazione analoghi a quelli dell'Appendice: in essi lo studioso può trovare la dimostrazione di enunciati che nel corso della esposizione sono soltanto presentati senza dimostrazione, oppure trova sviluppati certi argomenti che, pur essendo interessanti per sé, non sono essenziali agli sviluppi del testo » (1984, p. 5).

Infine il criterio di coerenza al tema trattato sapendo rinunciare alle opere onnicomprensive che sono poi quelle nullacomprenditive. « Vogliamo infine ricordare che i problemi di cui ci occuperemo nel presente volume riguardano le questioni finanziarie e nel senso stretto del termine. Non ci occuperemo quindi di questioni economiche e pertanto potremmo dire che faremo una matematica della finanza, del credito e delle assicurazioni, non una economia delle questioni suddette. Ciò comporta in particolare che si intenderà assegnato un numerario (una moneta, secondo il significato comune ed abituale del termine) e non si faranno indagini sul significato economico e sulla genesi di questo; in più non si faranno indagini sul significato del *valore* di tale moneta e quindi non si faranno indagini sui fenomeni di inflazione, di deflazione e simili.

Questa precisazione potrà essere ritenuta superflua, ma abbiamo voluto farla esplicitamente perché riteniamo che uno dei mezzi per conseguire dei risultati scientificamente apprezzabili sia di circoscrivere bene il proprio oggetto e di non pretendere di poter applicare determinati metodi al di fuori dei campi per i quali essi sono stati concepiti » (1984, p. 6).

3.6. *Appunti di logica elementare*

Questo recentissimo lavoro di MANARA (1984) che si svolge nitido su cinque capitoli (I. Logica, conoscenza scientifica, matematicizzazione; II. Regole generali della logica; III. Operazioni sugli insiemi e algebra di Boole; IV. Il calcolo delle proposizioni; V. Il calcolo delle probabilità) è un nuovo servizio a chi si interessa di Scienze Sociali e Politiche. Per questo ci sia consentita una particolare attenzione allo stesso.

Il lavoro rivela due continuità di Manara: la gradualità; la precisazione dei confini della matematica.

La gradualità didattica: nello svolgere uno specifico ruolo didattico Manara cerca di alzare il livello dei suoi studenti senza imporre loro salti impossibili.

« La esposizione è stata tenuta ad un livello molto elementare, con scarso uso degli strumenti formali e simbolici, perché anche i lettori meno abituati all'impiego dei linguaggi formali possano conoscere, almeno sommariamente, gli strumenti oggi utilizzati per la deduzione, e conoscere i problemi che nascono dalla loro introduzione e dal loro uso.

Speriamo che ciò serva a spiegare le lacune e le omissioni che non potrebbero essere tollerate qualora il corso si rivolgesse ad altri ascoltatori, aventi interessi forse più precisi e preparazioni migliori nel campo dei sistemi formali, in particolare in quello della matematica.

Abbiamo pure ritenuto utile dare qualche cenno di calcolo delle probabilità, presentando questo capitolo della matematica come una dottrina che tende a razionalizzare le scelte economiche in condizioni di informazione incompleta ed a utilizzare nel miglior modo possibile le informazioni a questo scopo » (1984, p. 5).

Da questa prima impostazione è disceso il notevole successo di Manara come docente in una facoltà così distante dalla sua e in un ruolo così diverso: da Istituzioni di geometria superiore presso la facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, a Logica presso la Facoltà di Scienze Politiche.

La ragione del successo discende forse dal non assolutizzare una disciplina e dalla sempre netta chiarezza di Manara circa le relazioni tra matematica, logica, scienze sociali.

« Non intendiamo dare qui, all'inizio della nostra trattazione, una definizione astratta e generale della logica; il Lettore potrà farsi un'idea di questa dottrina seguendoci nella esposizione delle nostre idee. Vorremmo tuttavia avvertire qui che spesso il termine 'logica' viene accompagnato con aggettivi che vorrebbero qualificarlo, o con espressioni che mostrano di avere lo stesso scopo; per esempio capita di leggere e di sentir parlare di "logica giuridica", oppure di "logica economica" oppure anche di "logica del profitto" o di "logica della violenza". A nostro parere questi modi di esprimersi distorcono il significato che vogliamo qui dare al termine 'logica'; invero noi pensiamo che queste espressioni, ed altre analoghe, siano

imprecise e spesso fuorvianti, perché possono fare pensare che la scienza giuridica, oppure l'economia o altre dottrine possano avere delle 'logiche' particolari, ossia dei canoni di ragionamento peculiari, diversi dalle regole di ragionamento che sono valide per tutti. Volendo tuttavia cercare di delimitare almeno provvisoriamente il significato del termine e di descrivere meglio il suo ambito, potremmo dire che la logica è l'insieme delle dottrine che si occupano delle regole per ben ragionare. Pare ovvio e chiaro che noi siamo tenuti a ben ragionare ogni volta che cerchiamo la verità; ma si può osservare che la ricerca della verità può essere fatta con vari metodi e con vari atteggiamenti: ciò è dimostrato dalla esistenza delle varie scienze, ognuna delle quali ha i suoi canoni, e ricerca la verità per diverse strade, a seconda del proprio oggetto e del proprio punto di vista. Così ci sono le scienze della natura che si occupano della materia inorganica, non vivente, e quelle che si occupano del vivente. Ci sono le scienze dell'uomo che si occupano di ciò che è avvenuto, secondo vari punti di vista, di ciò che l'uomo sceglie e dei suoi comportamenti.

Esula dai nostri scopi il dare qui una descrizione completa, una analisi esauriente ed una classificazione di tutte le scienze; ci limitiamo ad osservare che ognuna di esse, nel cercare la verità secondo i propri metodi, mira al possesso certo di questa verità, e che questa certezza può avere vari gradi, a seconda delle varie scienze e dei loro oggetti; la certezza della conoscenza che ci dà una dimostrazione matematica è ovviamente diversa dalla certezza con cui possiamo raggiungere la verità nella Storia. Ci pare tuttavia di poter dire che ogni scienza raggiunge il proprio grado di certezza attraverso un procedimento che tende alla spiegazione, alla motivazione delle cose che ci appaiono. In altre parole, noi pensiamo che la pura elencazione di fatti, anche accertati, la pura raccolta di quelli che si chiamano anche 'protocolli' (cioè di informazioni del tipo « L'osservatore tal dei tali ha visto, nel tale instante e nel tale luogo il tale fenomeno ») non è ancora qualificabile come conoscenza scientifica: le informazioni che ci dà, per esempio, l'elenco telefonico di una città, anche se sono certe e degne di fiducia, non sono ancora qualificabili come conoscenze scientifiche. Ci pare infatti di poter dire che una delle circostanze che costituiscono essenzialmente la conoscenza scientifica, accanto alla certezza delle informazioni, sia la motivazione, la spiegazione di esse.

Per ricercare tale spiegazione ogni scienza ha i suoi propri metodi;

ma crediamo che si possa affermare che ogni scienza segue una procedura che analizzeremo presto, e che ci condurrà a precisare il compito ed il significato della logica nella nostra conoscenza » (1984, pp. 9-10).

«... Possiamo concludere quindi osservando che la esattezza della descrizione è un primo grande vantaggio dell'impiego dei mezzi matematici nella rappresentazione della realtà e degli oggetti che le scienze vogliono studiare; si può tuttavia osservare che esiste un secondo grande vantaggio nell'impiego degli strumenti matematici. Invero quando si descrivono le cose mediante numeri, e le relazioni tra di esse mediante relazioni matematiche (per es. mediante equazioni, algebriche o differenziali ed altri mezzi), è possibile rendere molto sicuro e per così dire automatico il procedimento di deduzione che fa passare dalle ipotesi alle conseguenze controllabili e sperimentalmente verificabili; tale deduzione infatti, in questo caso, si riconduce ad un calcolo, cioè alla applicazione delle leggi dell'aritmetica o in generale dell'algebra e del calcolo infinitesimale; e tale procedimento è controllabile da chiunque e ha i caratteri della più grande generalità e sicurezza ...

Va osservato tuttavia che la rappresentazione della realtà mediante i simboli della matematica presuppone che si accettino in via preliminare certe proprietà della realtà che si vuole rappresentare.

Per esempio si può osservare che la rappresentazione più precisa ed utile per la ulteriore elaborazione è quella che si ottiene con la operazione di misura: procedimento che tutti conoscono, perché fa parte del patrimonio di matematica elementare che viene acquisito da ogni cittadino delle nazioni civili e che viene utilizzato ogni giorno nella vita associata. Orbene, perché si possa misurare un oggetto, è necessario che questo possieda certe proprietà che fanno appartenere tale oggetto alla classe delle « grandezze » (intendendo questo termine nel senso tecnico preciso diverso dal senso generico che spesso gli si attribuisce nel linguaggio comune).

Molto spesso non è possibile misurare le cose che interessano, ed occorre limitarsi a fare dei confronti, oppure a dare degli indici che traducono il comportamento di folle di oggetti, come avviene quando si adottano i metodi della Statistica.

Ricordiamo inoltre che l'impiego dello schema matematico conduce ad adottare anche lo schema della proporzionalità, diretta o inversa, o, in generale, a tradurre le relazioni esistenti in realtà tra le

cose con le leggi che vengono giudicate 'semplici'; ma la qualità di 'semplicità' di una legge matematica viene valutata con criteri che sono tipicamente soggettivi e dipendono dalla formazione culturale, dall'intelligenza e dai gusti di chi giudica. Pertanto è comprensibile che la rappresentazione della realtà sia sottoposta a drastiche semplificazioni e risulti talvolta addirittura rudimentale o lontana dalla verità.

Questa situazione potrebbe essere descritta in modo sommario e rudimentale dicendo che nella spiegazione fisico-matematica della natura ciò che si guadagna nella certezza della deduzione si perde forse in profondità nella conoscenza » (1984, pp. 17-18).

Queste proposizioni si completano ulteriormente con la riflessione sulla « matematicizzazione » della scienza:

« Abbiamo visto che nella costruzione di una teoria scientifica, cioè nella ricerca di una spiegazione dei fenomeni che ci appaiono, entra in modo fondamentale una fase che potremmo chiamare 'deduttiva', cioè una fase in cui la deduzione di conseguenze verificabili da ipotesi non direttamente verificabili permette di convalidare oppure di confutare le ipotesi stesse e quindi accresce la conferma della loro validità oppure costringe ad abbandonarle.

Ci pare di poter affermare che in nessun caso viene contestata la legittimità della esistenza di questa fase della costruzione di una spiegazione dei fenomeni; le eventuali analisi e le possibili critiche vertono piuttosto sulla determinazione di procedimenti che siano inoppugnabili e facilmente verificabili, in modo da poter evitare, nei limiti del possibile, che fra le ipotesi e le loro conseguenze dedotte si possano intromettere degli errori di deduzione formale. Questa osservazione conduce a formulare una ipotesi di spiegazione, almeno parziale, del successo della matematizzazione della scienza della natura; processo che è incominciato con Galileo e continua tuttora, anzi si espande, pervade con le sue propaggini anche le scienze diverse dalla fisica e dalla chimica, e tende ad includere nel suo dominio, sotto un certo aspetto, anche la logica, almeno del capitolo ristretto della logica simbolica.

Effettivamente la matematica è diventata via via la lingua nella quale sono stati espressi i fenomeni della meccanica classica (compresi quelli dell'astronomia) e poi i fenomeni della fisica (compresi quelli del calore, cioè i fenomeni irreversibili), poi i fenomeni che riguardano le decisioni economiche dell'uomo in condizioni di informazione incompleta (con il calcolo delle probabilità) e via via

— come abbiamo detto — le strutture formali deduttive della logica, con la algebra di Boole e la teoria del calcolo delle proposizioni.

Pensiamo quindi che valga la pena di cercare di identificare qualche ragione del successo della matematicizzazione della scienza, e di mettere in evidenza alcune circostanze che ci sembrano importanti. A tal fine osserviamo anzitutto che l'impiego della matematica permette di rappresentare e di identificare gli oggetti della scienza con una chiarezza ed una precisione molto maggiore di quella che si potrebbe ottenere con le descrizioni fatte utilizzando il linguaggio comune ... » (1984, pp. 15-16-17).

4. Il contributo alla ricerca scientifica

4.1. Il contributo di Manara alla ricerca scientifica in economia si è svolto in tre modi:

— attraverso l'insegnamento universitario, cooperando anche ad avviare alcuni studenti alla ricerca e alla carriera universitaria;

— attraverso la grande disponibilità che egli ha sempre offerto ai suoi colleghi economisti per affrontare temi matematicamente complessi;

— attraverso gli scritti, su temi di economia. Questi sono numericamente pochi ma non perciò meno significativi. Si tratta dei lavori: *Il modello di Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci* (1968); *Sulla introduzione di una funzione indice di utilità* (1968); *Sull'uso delle distribuzioni triangolari nei modelli di pianificazione probabilistica* (1971).

4.2. Il contributo alla produzione congiunta

Questo articolo appare originariamente nel 1968 su « L'Industria ». Nell'articolo si svolge il primo tentativo di tradurre la parte seconda del volume di Sraffa, *Produzione di merci a mezzo di merci* (1960), che riguarda la produzione congiunta (escludendo il caso con « terra » contenuto nel cap. XI del citato volume di Sraffa che da Manara non viene esaminato) in termini di algebra matriciale. Il saggio di Manara ha rappresentato un contributo cruciale per tutta la successiva letteratura sulla produzione congiunta. Ciò è

riconosciuto da tutti gli autori, anche da quelli che non concordano con lui su alcuni punti. Io aggiungerei che in termini di linguaggio e logica matematica esso rappresenta decisamente il più nitido tra i primi contributi su Sraffa; assai più di quello di Peter Newman del 1962 relativo al prodotto singolo, argomento pur meno complesso di quello della produzione congiunta.

Lo scopo del saggio di Manara è ottimamente espresso, come d'usuale, dall'autore stesso:

«L'analisi che qui svolgiamo appare quindi non del tutto inutile; e ciò non soltanto per lo scopo a cui accenna argutamente P. Newman nell'opera citata, e cioè al fine di "tradurre l'opera di Sraffa nel dialetto walrasiano, molto più usato, della economia matematica" ma anche e soprattutto per analizzare le basi logiche della trattazione di Sraffa e tentare la enunciazione di ipotesi sotto le quali il suo modello appare accettabile, tali ipotesi non sempre sono chiaramente ed esplicitamente presentate da Sraffa, forse perché — per l'uso molto limitato del linguaggio matematico che egli fa — si ritiene dispensato dall'enunciazione precisa delle condizioni sotto le quali le relazioni che egli scrive e le argomentazioni che svolge possano avere senso ».

Ma, oltre alla nitida elaborazione formale, Manara aggiunge originali contributi. In particolare il saggio di Manara deve la sua importanza al fatto di essere, come detto, la prima analisi matematica degli schemi sraffiani di produzione congiunta (escludendo il caso « terra »).

Manara mostra chiaramente che una estensione dei risultati ottenuti per il caso di industrie a prodotto singolo (considerato da P. Newman) al caso di produzione congiunta non è praticabile.

In particolare Manara mostra:

1) che i sistemi vitali possono presentare prezzi negativi. In altri termini si tratta della « accettabilità » del sistema dei prezzi;

2) che il sistema tipo può non esistere (se l'equazione caratteristica non ha soluzioni reali). In altri termini si tratta della possibilità di « identificare » il sistema tipo;

3) che, nella trasformazione che consente di individuare le merci base e non base nel caso generale di produzione congiunta, i coefficienti di lavoro possono diventare negativi. In altri termini si tratta della « distinzione » tra prodotti base e prodotti non base.

Procedendo — per ragioni di comodità espositiva — in ordine inverso, si può anzitutto osservare che il procedimento sviluppato in Manara al fine di esplicitare la distinzione fra merci base e merci non-base ha costituito il punto di partenza per le successive estensioni di Steedman (1977) e Pasinetti (1977). Più recentemente, Flaschel (1982) ha evidenziato la possibilità di generalizzare la nozione di merce base identificando due definizioni indipendenti, una delle quali (quella di « merce base nel senso di Sraffa », cui Flaschel propone di affiancare quella di « merce base nel senso di Leontief ») corrisponde esattamente a quella utilizzata nei lavori di Manara, Steedman e Pasinetti.

Anche il caso di inesistenza (cioè impossibilità ad identificare) del « sistema tipo » presentato in Manara può considerarsi un risultato definitivamente acquisito nella letteratura, nel senso che è possibile individuare sistemi a produzione congiunta tali che, pur ottenendo un vettore dei prezzi positivo in corrispondenza di un intervallo del saggio di profitto $0 < r < R$, non permettono di calcolare un saggio massimo di profitto (R^*) appartenente all'insieme dei numeri reali. Tant'è che nell'ambito dell'approccio « con equazioni » nessuno, a quanto mi risulta, ha in seguito presentato teoremi significativi sull'esistenza del « sistema tipo » nel caso di produzione congiunta generalizzata.

Per quanto infine concerne lo studio delle condizioni di « accettabilità » del sistema dei prezzi, mi sembra che si possa affermare quanto segue:

i) Manara fornì le condizioni *sufficienti* per l'esistenza di un vettore dei prezzi positivo, condizioni il cui significato economico, da esplicitare, Manara lasciava agli economisti in perfetta coerenza con i suoi criteri metodologici prima spiegati; quindi egli non indaga le corrispondenti proprietà della curva $w-r$;

ii) i poco incoraggianti risultati ottenuti a tale riguardo hanno dimostrato che il caso della produzione congiunta non poteva essere affrontato adottando la medesima procedura che aveva dato risultati nel caso di produzione singola, procedura consistente nel ricercare condizioni in grado di garantire la positività del vettore dei prezzi *per una data « tecnica » e indipendentemente dalla composizione del prodotto netto* e nel passare poi ad esaminare, in un secondo momento, il problema della « scelta delle tecniche ».

Il contributo di Manara rappresentò dunque, per così dire, un segno

dimostrativo — sia pur indirettamente — che il problema avrebbe dovuto essere affrontato in altro modo;

Per certi versi questo in alcuni casi confermò (è il caso del fenomeno « terra » esaminato da Quadrio Curzio nel 1967) ed in altri casi suggerì indirettamente l'opportunità di procedere all'esame di casi « particolari » sì, ma rilevanti di produzione congiunta (come sono il caso di produzione congiunta dovuta alla sola presenza di « capitale fisso » o di « terre » di diversa fertilità);

Altri autori, che si sono interessati, del « caso più generale », hanno invece mostrato come lo studio delle condizioni di « accettabilità » del sistema dei prezzi *non* possa essere condotto prescindendo da qualsiasi considerazione circa le quantità prodotte (poiché non vale, in questo caso, il cosiddetto « teorema di non-sostituzione ») e dal fatto che al variare dei parametri distributivi generalmente si pone — nel caso di produzione congiunta generalizzata — un problema di « scelta dei processi » già all'interno di uno stesso sistema inizialmente dato (poiché non è in generale possibile identificare un intervallo $0 < r < R$ in corrispondenza del quale si abbiano prezzi positivi a parità dei livelli di attivazione dei singoli processi e, contemporaneamente, una relazione $w-r$ caratterizzata dalle proprietà desiderate).

Complessivamente il contributo di Manara ha chiarito che la difficoltà ad ottenere soluzioni con significato economico dagli schemi generali di produzione congiunta non era imputabile a carenze degli strumenti di analisi matematica ma era piuttosto una caratteristica congenita di quegli schemi.

Ciò spiega — come già detto — perché nella letteratura i più interessanti risultati corrispondono a casi particolari di produzione congiunta, individuabili secondo due criteri operativi: quello economico e quello matematico.

I casi particolari di interesse economico sono quello dei mezzi di produzione durevoli (macchine). Quanto al criterio matematico esso porta ad analizzare particolari strutture matriciali capaci di dar luogo a soluzioni con caratteristiche analoghe a quelle della produzione singola.

Solo più recentemente si è andata alimentando una impostazione (da alcuni definita filoneoclassica) che tende ad analizzare questi schemi secondo l'ottica della scelta dei metodi di produzione più convenienti da una tecnologia data secondo i tradizionali metodi di ottimizzazione matematica.

A nostro parere una svolta in questo settore di studi è consistita nel comprendere le ragioni di risultati economicamente scomodi (come i prezzi negativi) piuttosto che nel tentativo di escluderne a priori la possibile manifestazione.

In questo senso ci sembra trovi conferma l'impostazione originaria di Manara che, considerando « legittime » soluzioni alle quali era difficile attribuire un significato economico, lasciava agli economisti il compito di darne una valutazione.

4.3. *Sulla introduzione di una funzione indice di utilità*

Scopo di questo articolo è la costruzione di una funzione indice di utilità; questa costruzione richiede l'enunciazione di un sistema di assiomi. Manara avverte che, in questo caso, il termine assioma non indica una proposizione assolutamente incontrovertibile, ma semplicemente una proposizione che viene posta all'inizio di una certa teoria e sottolinea, riguardo l'attendibilità degli assiomi enunciati e la loro adeguatezza a descrivere ciò che avviene nella realtà, di aver accettato il giudizio degli studiosi del comportamento del consumatore.

Nella prima parte del lavoro vengono indicati i tre assiomi che permettono di caratterizzare, nell'insieme dei vettori a componenti non negative, una relazione di preferenza debole tra gli stessi vettori, una relazione di indifferenza ed una di preferenza forte e vengono indicate le proprietà formali di tali relazioni.

Sono poi indicati altri due assiomi che permettono di collegare la relazione di preferenza con i seguenti tipi di relazioni tra vettori a componenti non negative: $x > y$, $x \cong y$ e $x \preceq y$.

Viene quindi esplicitamente dimostrata l'indipendenza degli assiomi enunciati.

L'ultima parte del lavoro è dedicata alla costruzione di una funzione continua che abbia i caratteri di quella che gli economisti chiamano « funzione indice di utilità ».

Gli assiomi posti alla base sono sufficienti per poter dimostrare l'esistenza di una funzione di utilità e la sua continuità. In questo caso quindi per dimostrare l'esistenza di una soluzione al problema del consumatore (quando i prezzi sono strettamente positivi) è sufficiente osservare che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza di un massimo per la funzione di utilità.

Manara conclude che la dimostrazione dell'esistenza di soluzione al problema del consumatore, ottenuta senza far ricorso all'esistenza e alla continuità della funzione di utilità, può apparire come una inutile complicazione, dato che l'esistenza e la continuità di tale funzione possono essere dimostrate se si accettano gli assiomi di base. Tale affermazione implica anche che nel caso in cui si abbandonino uno degli assiomi di base occorra procedere alla dimostrazione di esistenza per altre vie.

4.4. *Sull'uso delle distribuzioni triangolari nei modelli di pianificazione problematica*

La costruzione di un modello matematico che spieghi l'andamento di una certa variabile partendo da informazioni incerte richiede di associare ad ogni informazione la rispettiva probabilità, cioè di ottenere una funzione di distribuzione di probabilità della variabile in oggetto.

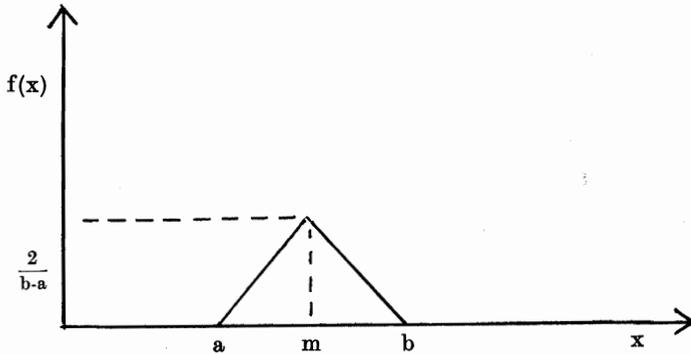
In questo articolo Manara propone l'uso della funzione di distribuzione triangolare. Tale funzione si basa su tre parametri generalmente ottenibili in modo poco dispendioso. Questi tre parametri sono:

- un limite inferiore al valore atteso che indichiamo con a ;
- un limite superiore al valore atteso che indichiamo con b ;
- il valore più probabile che indichiamo con m .

È evidente che un'infinità di funzioni di distribuzione di probabilità possono essere ottenute dalle precedenti informazioni. Manara sottolinea che il vantaggio della funzione da lui proposta è essenzialmente quello di evitare le obiezioni a cui la scelta di altre funzioni, come ad esempio la funzione beta, si presterebbe.

La funzione di distribuzione triangolare è costruita in modo da associare probabilità nulla ai valori non compresi nell'intervallo (a, b) , e probabilità massima al valore più probabile. Inoltre si suppone che la funzione di probabilità cresca proporzionalmente al crescere del valore atteso dall'estremo inferiore al valore più probabile e decresca proporzionalmente al crescere del valore atteso dal valore più probabile all'estremo superiore.

In definitiva il grafico della funzione di distribuzione si presenta come segue:



Il grafico precedente chiarisce il motivo per cui questa funzione di distribuzione è chiamata triangolare.

La media S della funzione risulta: $\mu > (a + b + m)/3$; graficamente la media può essere determinata considerando l'ascissa del baricentro del triangolo evidenziato precedentemente.

Sia $f(x)$ la funzione di distribuzione di probabilità deve essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1; \text{ come si può infatti facilmente verificare.}$$

In particolare, avendo escluso che la variabile considerata assuma valori inferiori ad a o superiori a b risulta: $\int_a^b f(x) dx > 1$.

Nel caso in cui non si volesse escludere la possibilità che la variabile considerata assuma valori esterni all'intervallo $[a, b]$ la formulazione precedente può essere corretta indicando con a' e b' i nuovi limiti ai valori assumibili dalla variabile e ponendo $\int_{a'}^{b'} f(x) dx < 1$.

Relativamente a questo caso Manara considera le ipotesi, indicate come le più semplici, necessarie per costruire una funzione di distribuzione di probabilità che soddisfi la relazione precedente, abbia come moda m e sia triangolare.

4.5. Manara ha dato importanti contributi scientifici anche nei molti seminari che ha tenuto, sia in Università italiane sia in Atenei stranieri, sulla programmazione lineare, teoria dei giochi e delle strategie, teoria del controllo ottimale, teoria delle instabilità strutturali.

Purtroppo nessuno di essi è stato pubblicato. E sarebbe utile che Manara rivedesse gli elaborati e li desse ora alle stampe.

5. La scomodità e il successo di un maestro

Manara è un maestro e come tale ha una personalità forte. La sua intelligenza e la sua tenacia nelle idee lo rendono un personaggio non comodo, come d'altronde tutti i veri maestri. E queste sue qualità non gli hanno certo garantito una vita facile. Egli non ha mai cercato d'altronde successo d'immagine, che potrebbe definirsi mondano, non ha mai cercato il consenso seguendo l'onda delle montanti maree delle mode di falsi intellettuali.

Chi lo conosce può testimoniare. Ma anche chi non lo conosce può rendersene conto leggendo i suoi scritti sui temi più ampi di metodologia della scienza, su scienza e società, su problemi di etica, sul ruolo di un educatore.

Tra tutte queste testimonianze mi è personalmente ricordo vivissimo la coerenza di comportamento e di opinione scritta con cui affrontò gli anni in cui era in corso una « nobile » gara per dissacrare il più possibile gli Atenei.

Per questi motivi Manara non ha mai badato al successo del momento, quello che si misura con le citazioni sui quotidiani per le quali tutti abbiamo qualche comprensibile vanità e debolezza.

Il suo vero successo, oltre che nella produzione scientifica, consiste nell'essere e nell'essere stato per molti un punto di riferimento morale, scientifico, di stile accademico.

BIBLIOGRAFIA

- LOMBARDINI S.-MANARA C. F., *Introduzione Matematica all'Analisi Economica*, Milano 1957-58(?), pp. 464.
- MANARA C. F., *Matematica Generale*, Milano 1961, 2^a ed., pp. 631.
- MANARA C. F., *Sull'impiego del metodo matematico in economia*, « Rivista Internazionale di Scienze Sociali », gennaio-febbraio, LXXV, fasc. I (1967), 43.
- MANARA C. F., *Il modello di Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci*, « L'industria », n. 1 (1968), 3-18. Ripubblicato in *Contributi alla teoria della produzione congiunta*, edito da PASINETTI L., Bologna 1977 (trad. in inglese, *Essays on the Theory of Joint Production*, Macmillan Press, 1980).
- MANARA C. F., *Sulla introduzione di una funzione indice di utilità*, « Periodico di Matematiche » (1968), 193-217.
- MANARA C. F., *Sull'uso delle distribuzioni triangolari nei modelli di pianificazione probabilistica*, « Rivista di Statistica Applicata » (1971), 151-179.
- MANARA C. F., *Appunti di Logica Elementare*, Milano 1984.
- MANARA C. F.-CANETTA P., *Elementi di matematica finanziaria e attuariale*, Milano 1984, pp. 331.
- MANARA C. F.-NICOLA P. C., *Appunti alle Lezioni di Matematica Finanziaria (Economica)*, Milano 1964-1965, pp. 325.
- MANARA C. F.-NICOLA P. C., *Elementi di Economia Matematica*, Milano 1967, pp. x+308; 2^a ed. 1970.

SUNTO

In questo articolo si esamina l'attività di ricerca di C. F. Manara nel campo della matematica applicata all'economia. Si considerano in particolare tre linee di attività dello studioso: i contributi sul metodo; i contributi didattici; i contributi scientifici, individuando al loro interno e nelle loro connessioni, importanti criteri di coerenza e di originalità nel pensiero di C. F. Manara.

SUMMARY

In this paper, we review the research activity carried out by Carlo Felice Manara in the field of Mathematical Economics.

In particular, we stress our attention on three guidelines of his academic activity: studies on methodology; didactic work and scientific contributions.

For each of them, — giving the due importance to their mutual links —, we pick up the crucial aspects of originality in the work of C. F. Manara.

Bibliografia di Carlo Felice Manara

- Semplice deduzione sintetica delle proprietà metriche di una notevole cubica piana*, Rend. Ist. Lomb., Vol. 74 (1940-41).
- Introduzione della funzione esponenziale mediante generazione meccanica della spirale logaritmica*, Periodico di Matematiche: S.IV., Vol. 20 (1940), pp. 246-249.
- Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli* (in collaborazione con O. Chisini), Boll. Unione Mat. Italiana (U.M.I.), Serie III, Vol. I (1942), pp. 114-119.
- Ricerca grafica della retta dei flessi di una cubica piana nodata*, Boll. U.M.I. (2), Anno 3, N. 4 (1941).
- Vedute sulla geometria del triangolo*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 22 (1942), pp. 145-157.
- Normale proiettiva e normale puntuale dei rami superlineari delle curve piane*, Rend. Ist. Lomb., Vol. 77 (1943-44).
- Invarianti per trasformazioni puntuali regolari dei rami superlineari ordinari delle curve algebriche piane*, Rend. Ist. Lomb., Vol. 77 (1943-44).
- Sul significato geometrico di alcuni invarianti dei rami superlineari ordinari delle curve algebriche piane*, Rend. Ist. Lomb., Vol. 77 (1943-44).
- La rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di una singolarità ordinaria della sua curva di diramazione*, Rend. Ist. Lomb., Vol. 58 (1944-45).
- Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli* (in collaborazione con Chisini), Annali di Matem. (4), 25 (1946), pp. 255-265.

- Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli, Nota II* (in collaborazione con O. Chisini), *Annali di Matem.* (4), 26 (1947).
- Esistenza teopologica di diramazioni negative per le curve doppie*, *Rend. Acc. Lincei, Serie VIII*, vol. 3 (1947).
- Sulle curve di diramazione dei piani multipli*, *Rend. Ist. Lomb.*, Vol. 82 (1949).
- Sulle caratterizzazioni delle ipersuperficie di diramazione degli S_n tripli*, *Rend. Ist. Lomb.*, Vol. 82 (1949).
- Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane*, *Rend. Acc. Lincei* 8 (1950).
- Studio delle podarie rispetto a coniche*, *Periodico di Matem.*, Serie IV, Vol. 28 (1950), pp. 184-188.
- Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione*, *Atti Sem. matem. e fisico dell'Univ. di Modena*, Vol. 5 (1950-51).
- Le condizioni perché due curve gobbe siano omologiche rispetto ad un centro assegnato*, *Rend. Ist. Lomb.* 84 (1951), p. 521.
- Una condizione sufficiente per la identità birazionale di due piani multipli*, *Rend. Ist. Lomb.* 84 (1951), p. 663.
- Sur une demonstration d'irreductibilité*, *Bull. de la société royale des sciences de Liege*, N. 11 (1951).
- Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della jacobiana*, *Atti del Sem. matem. e fisico dell'Università di Modena*, Vol. 5 (1951).
- Di un problema relativo ai triangoli*, *Period. di Matem.*, Serie IV, Vol. 27 (1951), pp. 91-97.
- Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plueckeriani*, *Boll. U.M.I.*, Serie III, Vol. 6 (1951), pp. 9-14.
- Il parallelismo di Levi-Civita nel piano iperbolico*, *Periodico di Matem.*, Serie IV, Vol. 23 (1953), p. 73.

- Complementi di geometria*, Lezioni sulle applicazioni geometriche delle Analisi raccolte dal dott. Mario Italiani, Tipolitografia Dini, Modena 1953.
- Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali*, Rend. Lincei, Serie VIII, Vol. 17 (1954).
- I gruppi ciclici di trasformazioni piane di Jonquières*, Rend. Ist. Lomb., Vol. 87 (1954).
- L'aspetto algebrico di un fondamentale teorema di geometria descrittiva*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 24 (1954), pp. 142-149.
- Invarianti proiettivi differenziali nello spazio e curve W* , Boll. U.M.I., Serie III, Vol. 9 (1954), pp. 237-240.
- Cubica equianarmonica legata ad una terna di E_1* , Boll. U.M.I., Serie III, Vol. 9 (1954), pp. 353-359.
- La geometria nell'ambito del pensiero matematico*, Annuario dell'Università di Modena (1954-55). Discorso di inaugurazione dell'anno accademico 1954-55.
- La risoluzione dell'equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 34 (1956), pp. 65-84.
- La geometria nell'ambito del pensiero matematico*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 34 (1956), pp. 148-158.
- Sul concetto di equivalenza per i poligoni ed i poliedri*, Periodico di Matem. (1956).
- Elementi di matematica finanziaria ed attuariale*, Malfasi ed., Milano (1957).
- Idee classiche ed idee moderne sulla geometria algebrica*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 35, N. 1 (1957), pp. 1-13. Prolusione dei corsi all'Università di Pavia.
- Recensione del volume *Didattica della Matematica*, Atti della Soc. Mathesis, 1956 (1957).
- Complementi di algebra ed elementi di trigonometria*. Ad uso degli studenti dei corsi propedeutici delle Facoltà universitarie (in collaborazione con P. Canetta), La Goliardica, Milano 1959.

- Esercizi di matematica finanziaria ed attuariale* (in collaborazione con P. Canetta), La Goliardica, Milano (1959).
- Problemi dell'educazione scientifica*, « Studium » (1960).
- Recensione del volume *Scritti matematici in onore di Filippo Sibirani*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 38 (1960), pp. 187-195.
- Matematica generale*, Milano (II ed. La Goliardica) (1961).
- Orientamenti e questioni attuali di topologia*, Rend. Sem. mat. e fisico di Milano, Vol. 31 (1961), pp. 91-100.
- Dialogo tra generazioni e crisi dell'autorità*, « Vita e Pensiero », Anno 44 (maggio 1961), pp. 319-326.
- Problemi dell'educazione scientifica*, « Cattedra » 1961. Informazioni professionali ed aggiornamenti culturali e didattici per i professori delle scuole medie, Unione Cattolica Insegnanti Medi, Roma 1961, pp. 304-322.
- La scienza nell'ambito del pensiero religioso*, « Studium », N. 2 (1961).
- Pedagogia della matematica*, in *L'educazione scientifica*, Atti del convegno di « Scholé », Brescia 1962.
- La formazione degli insegnanti in Italia*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 41 (1963), pp. 302-308.
- Un elegante teorema sugli ovali*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 41 (1963), pp. 17-37.
- Il computo degli zeri di una funzione*, Periodico di Matem. (ibid.), pp. 129-160.
- Competenza scientifica e istruzione religiosa*, « Vita e Pensiero », Anno 46 (settembre 1963), pp. 724-751.
- Successioni ed equazioni alle differenze finite*, Periodico di Matem. (ibid.), pp. 129-160.
- Ufficio e significato dell'esperimento nell'insegnamento della geometria*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 42 (1964), pp. 248-258.
- Vittorio Emanuele Galafassi (1918-1964)* (Commemorazione di), Boll. U.M.I., Serie III, Vol. 20 (1965), pp. 279-282.

- Argomenti vecchi e insegnamenti nuovi: I diagrammi triangolari*, Le scienze, la Matematica e il loro insegnamento, N. 2, 3, pp. 107-110.
- Lezioni di geometria*, Viscontea, Milano (1965).
- Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 43 (1965), pp. 177-182.
- Linguaggio comune e logica simbolica. Alcune osservazioni*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 43 (1965), pp. 305-311.
- Sulla introduzione del concetto di ordinamento in un insieme*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 43 (1965), pp. 353-374.
- La scienza come valore nella società di oggi*, « Coscienza », mensile del Movimento laureati di Azione cattolica, N. 12 (dicembre 1965).
- La matematica nel pensiero galileiano*, in *Nel quarto centenario della nascita di Galileo Galilei*, Vita e Pensiero, Milano 1966.
- Federico Enriques* (in collaborazione con Modesto Dedò), Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 44 (1966), pp. 360-366.
- Elementi di economia matematica* (in collaborazione con Pier Carlo Nicola), Viscontea, Milano 1966.
- Sul problema delle formule ben formate*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 44 (1966), pp. 106-122.
- Università, Ambizioni politiche ed accademiche*, « Studi cattolici », N. 66 (1966), p. 58.
- Oscar Chisini*, Rend. Sem. mat. e fis. di Milano, Vol. 37 (1967), pp. 13-33.
- Oscar Chisini* (Commemorazione di), in collaborazione con Modesto Dedò, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 45 (1967).
- Numeri cardinali finiti e transfiniti*, Lezioni tenute ad un corso di aggiornamento per insegnanti, presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Milano. Ciclostilato.
- Sull'impiego della matematica nelle scienze sociali*, « Rivista internazionale di Scienze sociali » (1967).

- La simmetria*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 45 (1967), pp. 277-287.
- Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci*, « L'industria », N. 1 (1968), pp. 3-10. Ripubblicato in: *Contributi alla teoria della produzione congiunta*, a cura di Luigi Pasinetti, Il Mulino, Bologna 1977; ed in *Essays on the theory of joint production*, MacMillan Press, London 1980.
- Succès et limites de la mathématisation*. Relazione al Congresso mondiale di filosofia tenuto a Düsseldorf, settembre 1968.
- Sull'aggiornamento degli insegnanti di matematica ed osservazioni scientifiche*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 46 (1968), pp. 522-526.
- Il tradimento degli educatori*, « Coscienza », mensile del Movimento dei laureati di Azione cattolica, N. 4 (aprile 1968).
- Le sottigliezze metafisiche*, « Coscienza », mensile del Movimento dei laureati di Azione cattolica. Rubrica « Lettere al direttore », N. 12 (dicembre 1968).
- Sulla introduzione di una funzione indice di utilità*, Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 46 (1968), pp. 193-217.
- Alessandro Terracini* (Necrologio), Periodico di Matem., Serie IV, Vol. 46 (1968), p. 478.
- Alessandro Terracini* (Necrologio), Rend. Ist. Lomb. (Parte generale), Vol. 102 (1968), p. 101.
- La protesta e la « lettera »*, « Coscienza », mensile del Movimento dei laureati di Azione cattolica, N. 3 (marzo 1969).
- Il paese Mohatra*, « Idea », 1969-70.
- Alienati ma benedetti*, « Idea », 1969-70.
- I grandi trattatisti di etica*, « Studium », 1970.
- Esercizi di geometria*, Milano (II ed. Viscontea, 1970).
- Corso di geometria*, Milano (III ed. Viscontea, 1970).
- Introduzione* al volume *Fondamenti di geometria* di D. Hilbert, Trad. it. di Pietro Canetta, Feltrinelli, Milano 1970.

- Sull'uso delle distribuzioni triangolari nei modelli di pianificazione probabilistica*, Rivista di Statistica applicata (1971), pp. 151-179.
- Lo studio della matematica dalla scuola secondaria all'università*, Pedagogia e Vita, Serie 33 (1971-72), N. 2, pp. 117-131.
- Riscoperta della contemplazione*, « Studium », Anno 58, N. 2 (febbraio 1972).
- La topologia ed il nuovo modo di concepire la geometria*, Terzo programma (L'informazione culturale alla radio), N. 3 (1972), p. 64.
- La rabbia e le riforme*, « Studium », Anno 68, N. 11 (1972).
- Sull'impiego degli audiovisivi e dell'istruzione programmata nell'insegnamento della matematica*, Rendiconto del Seminario di Coesistenza (17-20 ottobre 1972), Istituto ambrosiano per il cinema, Fascicolo 10 (1972).
- L'università oggi e domani*, Universale Studium, N. 121 (1973).
- Audiovisivi e istruzione programmata nell'insegnamento della matematica*, « Pedagogia e vita » (1973).
- L'insegnamento della « insiemistica » nelle scuole dell'ordine elementare e medio*, « Pedagogia e vita », Serie 34, agosto-settembre 1973.
- Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi*, Vita e Pensiero, Milano 1975.
- Un esperimento didattico: L'insegnamento della matematica nei centri ANCIFAP*, « Pedagogia e vita », giugno-luglio 1975.
- Il cinema d'animazione nell'insegnamento della matematica e vari altri contributi*, in *Il cinema d'animazione nell'insegnamento della Matematica*, ISCA informazioni, Anno 3, N. 1 (ottobre 1974-gennaio 1975).
- Sulla risoluzione dei problemi matematici*, Didattica delle scienze, N. 57 (aprile 1975).
- Le figure nell'insegnamento della geometria*, Didattica delle scienze, N. 60 (novembre 1975).
- Fra Eligio e il saio*, Lettere al direttore della rivista « Il clero italiano », Anno 56, N. 11 (novembre 1975), p. 858.

- Università e libertà*, « Studi Cattolici », N. 173 (1975), pp. 421-428.
- Anche la scienza ha conosciuto il peccato*, *Civiltà delle macchine*, Anno 24, N. 1-2 (1976), pp. 63-69.
- Osservazioni sulla geometria descrittiva*, *Didattica delle scienze*, N. 61 (gennaio 1976), pp. 19-24.
- Proiezioni ed autovalori di operatori lineari*, *Rend. Ist. Lomb.*, Vol. 110 (1976), pp. 214-219.
- Momenti del pensiero matematico* (in collaborazione con Gabriele Lucchini), Mursia, Milano 1976.
- Il Grande Teorema*, *Studi Cattolici* (Sezione « scienza »), N. 181 (1976), pp. 203-206.
- Le macerie della contestazione universitaria*, *Studi Cattolici*, N. 193 (1976), pp. 181-189.
- La dimensione culturale della matematica. Problemi didattici. Esperienze e proposte di didattica della matematica 2*, *Didattica delle scienze*, N. 67 (gennaio 1977).
- Gruppi cristallografici piani 1. Esperienze e proposte di didattica matematica 3*, *Didattica delle scienze*, N. 68 (febbraio 1977).
- Gruppi cristallografici piani 2. Esperienze e proposte di didattica matematica 4*, *Didattica delle scienze*, N. 69 (aprile 1977).
- Grandezze e misure 1. Esperienze e proposte di didattica 6*, *Didattica delle scienze*, N. 72 (novembre 1977).
- Scienza e tecnica nello sviluppo dell'uomo di oggi*. Conferenza tenuta presso l'Istituto Lombardo Accademia di scienze e lettere, in occasione del 150° anniversario della morte di A. Volta.
- Passato e presente nella metodologia della scienza*, Conferenza tenuta presso l'Istituto Lombardo Accademia di scienze e lettere, nel ciclo « Aspetti e momenti del rapporto passato-presente nella storia e nella cultura » (1977), pp. 99-110.
- La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese* (in collaborazione con Maria Spoglianti), *Atti Acc. Naz. di Modena*, Serie IV, Vol. 19 (1977).

- Grandezze e misure 2. Esperienze e proposte di didattica matematica 7.* Didattica delle scienze, N. 73 (gennaio 1978).
- Programmazione e decisione in matematica elementare. Esperienze e proposte di didattica matematica 8,* Didattica delle scienze, N. 74 (febbraio 1978).
- Programmi di decisione in condizioni di incertezza. Esperienze e proposte di didattica matematica 10,* Didattica delle scienze, N. 76 (maggio 1978).
- Il ruolo dell'insegnamento delle scienze nella scuola dell'obbligo, « L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate »,* organo del Centro ricerche didattiche « Ugo Morin », Vol. 1, N. 3 (settembre 1978). Atti del Convegno tenutosi a Brescia il 21 gennaio 1978, presso la Facoltà di scienze dell'Università cattolica.
- Programmi di decisione in condizioni di incertezza 2. Esperienze e proposte di didattica matematica 11,* Didattica delle scienze, N. 79 (gennaio 1979).
- Programmi di decisione in condizioni di incertezza 3. Esperienze e proposte di didattica,* Didattica delle scienze, N. 80 (febbraio 1979).
- Vantaggi e problemi dai punti di vista scientifico e didattico di una nuova laurea specifica,* Periodico di Matem., Serie V, Vol. 55 (1979), pp. 17-24.
- Insegnamento della matematica e le nuove tecnologie* (recensione), « L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate », Vol. 2, N. 2 (1979), pp. 70-71.
- Dimensione storica nell'insegnamento delle scienze,* Didattica delle scienze, N. 82 (maggio 1979).
- R. G. Boscovich e i precursori di V. Poncelet,* (in collaborazione con Maria Spoglianti), Rendiconti del Sem. mat. di Brescia, Vol. 3 (1979).
- Elementi di matematica finanziaria ed attuariale* (in collaborazione con Pietro Canetta), Viscontea, Milano 1980.
- Intuizione e logica. Problemi didattici della matematica,* Didattica delle scienze, N. 86 (settembre 1980).

- La matematica come strumento di formazione culturale*, Didattica delle scienze, N. 89 (ottobre 1980).
- La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici 1. La crisi galileiana delle scienze della natura*, Didattica delle scienze, N. 95 (ottobre 1981).
- Fede e mentalità scientifica*, Studi Cattolici, Parte I, N. 247 (settembre 1981); Parte II, N. 248 (ottobre 1981).
- Federigo Enriques et David Hilbert*, Relazione al « Colloque de l'Académie internationale de philosophie des sciences », Orbetello (17-21 aprile 1979); Bruxelles, Office international de librairie (1981).
- L'Ameba e l'errore. Lettera aperta al prof. Antiseri*, Didattica delle scienze, N. 93 (aprile 1981), inserto, pp. 10-11.
- La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici. La crisi galileiana della scienza della natura*, Didattica delle scienze, N. 95 (gennaio 1981).
- La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici 2. Il calcolo infinitesimale e la meccanica classica*, Didattica delle scienze, N. 97 (gennaio 1982).
- La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici 3. Dalla meccanica razionale alla termodinamica*, Didattica delle scienze, N. 98 (febbraio 1982).
- La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici 4. La concezione di Einstein e la geometrizzazione della fisica*, Didattica delle scienze, N. 99 (1982).
- Evidenza e postulati in geometria*, Studi Cattolici, N. 256 (giugno 1982), pp. 331-339.
- Giornali in classe? Meglio fuori*, Studi Cattolici, sezione « Istruzione », N. 261 (novembre 1982), pp. 755-760.
- Il linguaggio della scienza. Parte I*, Didattica delle scienze, N. 102 (novembre 1982).
- Il contributo di Enriques alla matematica contemporanea*, in *Federigo Enriques: approssimazione e verità*, a cura di Ornella Pompeo Faracovi, Belforte, Livorno 1982, pp. 25-42.

- Matematica ed elaboratori di informazione*, « La ca' granda », Anno 24, N. 4 (1983), pp. 11-14.
- Il linguaggio della scienza. Parte II*, Didattica delle scienze, N. 103 (gennaio 1983).
- Il giornale fa male?*, Studi Cattolici, sezione « Opinioni e commenti », N. 264 (febbraio 1983), p. 115.
- I piccoli calcolatori tascabili nella scuola* (in collaborazione con Raffaella Tardini Manara), « L'insegnamento della Matematica e della scienza integrate » del Centro « Ugo Morin », Parte I, II e III, Vol. 6, N. 2, 3, 4 (1983).
- Appunti di logica elementare*, ISU dell'Università Cattolica del S. Cuore, Milano 1983 (altre edizioni negli anni successivi).
- La generalizzazione del concetto di geometria*, Scuola e didattica, (1983).
- Come fare della matematica uno strumento di formazione culturale dei giovani*, Nuova secondaria, N. 2 (1983).
- Geometria e logica*, Nuova secondaria, N. 4 (dicembre 1983).
- L'evoluzione della matematica nel secolo XIX*, in *Storia della Scienza* (cap. XIV), di Evandro Agazzi, Vol. II, Città Nuova ed., Roma 1984, pp. 15-50.
- La matematica del XX secolo* (in collaborazione con Giulio Giorello), in *Storia della scienza* (cap. XX) di Evandro Agazzi, Vol. II, Roma 1984. Città Nuova ed., Roma 1984, pp. 246-293.
- Ampliamenti del concetto di geometria*, Scuola e didattica (1984).
- Il liceo classico. Le radici*, « Intervento » (1984).
- La geometria. Problemi logici e didattici*, Scuola e didattica (inserto), N. 3 (15 ottobre 1984).
- La mathématique face à son histoire*, Relazione al Congresso annuale di Friburgo della Academie des sciences di Bruxelles, 1985.
- La scuola e l'informatica*, Relazione al 39° Congresso del CNADSI, ottobre 1984, ripresa e ripubblicata in « Nuovi studi politici »,

- N. 3 (1985) e anche nel N. 290/91 di « Studi Cattolici » (aprile-maggio 1985).
- Rischi e sprechi del « Progresso »*, Studi Cattolici, N. 295 (settembre 1985).
- Scienza e libertà*, « Per la filosofia ». Filosofia ed insegnamento, Anno II, N. 5 (settembre-dicembre 1985).
- Due lezioni sui fondamenti della matematica* tenute alla Mathesis di Milano, il 13 e 20 novembre 1985.
- Il concetto di media*, Nuova secondaria, N. 5 (gennaio 1985).
- Il liceo classico*, Nuova secondaria, N. 5 (gennaio 1985).
- La generalizzazione del concetto di geometria*, Nuova secondaria, N. 6 (febbraio 1985).
- Ampliamento del concetto di geometria*, Nuova secondaria, N. 6 (febbraio 1985).
- Che cosa una persona colta deve sapere di matematica*, Nuova secondaria, N. 8 (aprile 1985).
- Il fascino dell'autodistruzione*, Nuova secondaria, N. 8 (maggio 1985).
- La matematica nella cultura occidentale*, « Per la filosofia », Filosofia ed insegnamento (1986).
- I modelli matematici nella scienza*, Conferenza tenuta alla Mathesis di Milano.**
- Epistemologia della matematica*, Provveditorato agli studi di Bergamo.**
- I cristiani e la scienza*, Intervento su « Studi Cattolici », N. 304, Anno 30 (giugno 1986).
- La geometria: valori conoscitivi e formativi*, Persona e sapere, Quaderno N. 1 della Fondazione S. Cuore 1986, pp. 52-58.

** Conferenza non pubblicata.

Per un curricolo di educazione matematica, in *Per un curricolo continuo di educazione matematica della scuola dell'obbligo*, Quaderno IRRSAE Lombardia, pp. 17-23.

La matematica come linguaggio (ibid.), pp. 23-31 (in collaborazione con Mario Marchi).

Grandezze e misure (ibid.), pp. 55-71.

Logica naturale e logica simbolica (ibid.), pp. 71-88.

Progetto di formazione matematica (ibid.), pp. 93-98.

Analisi della ricerca: la geometria (ibid.), pp. 99-104.

Analisi della ricerca: la misura (ibid.), pp. 105-108 (in collaborazione con Mario Marchi).

Computer ed insegnamento della matematica, Quaderni del Dipartimento di Matematica « F. Enriques » dell'Università di Milano, Quaderno N. 16.

La matematica, Relazione tenuta al Convegno sulla « Causalità nella scienza » tenutosi a Napoli a cura dell'IPE (Istituto per ricerche educative, Napoli).**

Tavola rotonda al convegno del CNADSI tenutosi il 26 gennaio 1986 presso il Circolo Filologico milanese su « Informatica nella scuola », Bollettino del CNADSI, febbraio-marzo 1986.

L'economia e il metodo matematico, « Economia politica », Anno III, N. 2 (agosto 1986).

Il pensiero matematico tra la fine dell'800 e l'inizio del 900, Conferenza tenuta il 28 gennaio 1987 ad Ancona al Convegno di studio su « Il pensiero scientifico di Vito Volterra ».*

Giuseppe Veronese ed il problema del continuo geometrico, « L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate », vol. 10, N. 2 (febbraio 1987).

* Di prossima pubblicazione.

** Conferenza non pubblicata.

Produzione ed efficienza con tecnologie globali (in collaborazione con Alberto Quadrio Curzio e Mario Faliva), « Economia politica », Anno IV, N. 1 (aprile 1987), pp. 11-47.

Il problema del continuo geometrico nel pensiero di Ruggero Boscovich, Relazione tenuta il 16 settembre 1987 al Convegno per il bicentenario della morte di R. Boscovich.*

Ricordo di Oscar Chisini, Conferenza tenuta a Milano, all'apertura del Convegno di Geometria algebrica (26 maggio 1987).**

Problemi filosofici della geometria in Ruggero Giuseppe Boscovich, Relazione letta l'8 ottobre 1987 a Brescia, in occasione del Convegno « Francesco Lana Terzi. La scuola gesuitica e la scienza moderna ».

Beniamino Segre (Commemorazione di), letta alla seduta del 29 ottobre 1987 dell'Istituto Lombardo Accademia di scienze e lettere.

Giuseppe Capograssi e Blaise Pascal, Studi Cattolici, N. 321 (novembre 1987), pp. 643-649.

La visione Kleiniana della geometria, Scuola e didattica, N. 5 (15 novembre 1987).

* Di prossima pubblicazione.

** Conferenza non pubblicata.